

Таганрогский авиационный колледж имени В.М. Петлякова»



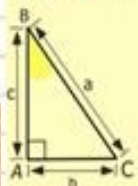
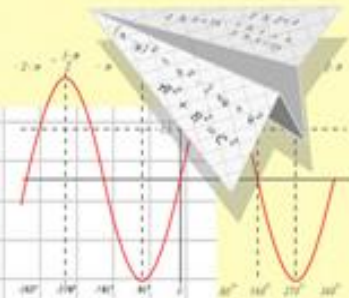
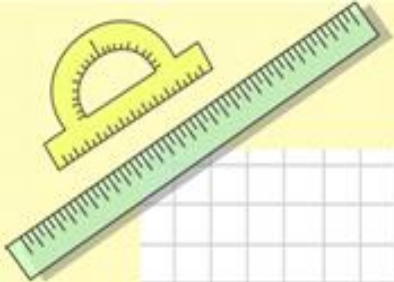
$$\begin{array}{r} \frac{1}{2} 500 \\ \times 42 \\ \hline 210 \\ + 84 \\ \hline 105000 \end{array}$$



Математика

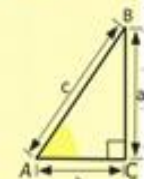
Иррациональные уравнения

Преподаватель математики Пахомова Е.А.



$y = \cos x$

- $2 \times 2 = 4$
- $3 \times 3 = 9$
- $4 \times 4 = 16$
- $5 \times 5 = 25$
- $6 \times 6 = 36$
- $7 \times 7 = 49$
- $8 \times 8 = 64$



$$\begin{array}{r} 2500 \\ \times 42 \\ \hline 2100 \\ + 8400 \\ \hline 105000 \end{array}$$

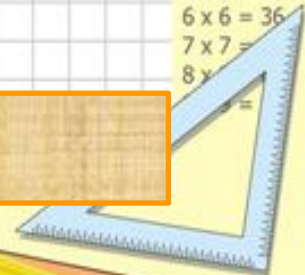
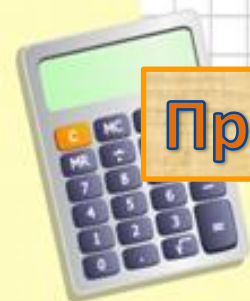
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

$$\sin 90^\circ = 1$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 25 + 45 \\ x = 70 \end{cases}$$

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$



Иррациональные уравнения

Обучающая цель:

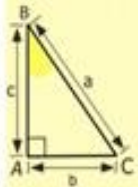
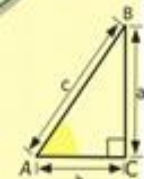
сформировать у учащихся понятия иррационального уравнения. Познакомить с некоторыми видами и методами их решений. Обосновать необходимость выполнения области допустимых значений и проверки.

Воспитательная цель:

воспитание аккуратности, четкости при выполнении решений математических задач.

Развивающая цель:

развитие аналитического мышления, формирование умения выделить существенные признаки и свойства, позволяющие выбрать наиболее рациональные методы решения.



$$\begin{array}{r} 1 \\ \times 2500 \\ \times 42 \\ \hline 210 \\ + 84 \\ \hline 105000 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2 \times 2 = 4 \\ 3 \times 3 = 9 \\ 4 \times 4 = 16 \\ 5 \times 5 = 25 \\ 6 \times 6 = 36 \\ 7 \times 7 = 49 \\ 8 \times 8 = 64 \\ 9 \times 9 = 81 \end{array}$$



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

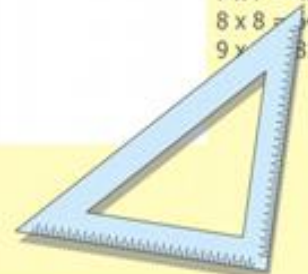
$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

$$\sin 90^\circ = 1$$



$$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \end{cases}$$
$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 25 + 45 \\ \hline x = 70 \end{cases}$$

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$



Устно.

1. Решить систему неравенств:

а) $\begin{cases} x > 3 \\ x < 4 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x > 6 \\ x > 0 \end{cases}$ в) $\begin{cases} 5 - 10x > 0 \\ 6 - 12x < 0 \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2 - 4 > 0 \\ x > 1 \end{cases}$

2. Решить уравнение:

а) $x^2 + 4x = 0$

б) $6x - 3 = 1$

в) $\frac{x^2}{2} = 4$

3. В следующих уравнениях вычислить дискриминант:

$x^2 + 5x + 4 = 0$, $x^2 - 6x + 1 = 0$

4. Представить в виде многочлена:

$(x - 4)^2$, $(x + 3)^2$

$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$

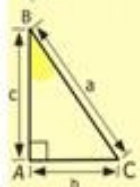
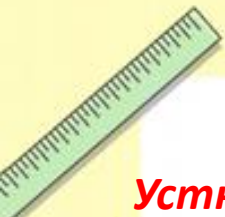
$\sin 90^\circ = 1$

$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \end{cases}$

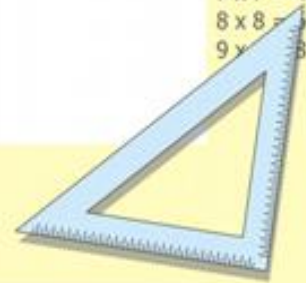
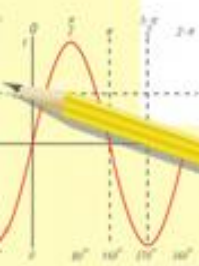
$\begin{cases} y = 1 \\ x = 25 + 45 \end{cases}$

$x = 70$

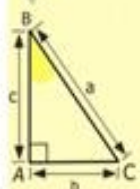
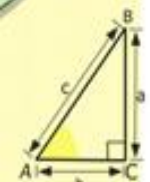
$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$



| |
|------------|
| 2 x 2 = 4 |
| 3 x 3 = 9 |
| 4 x 4 = 16 |
| 5 x 5 = 25 |
| 6 x 6 = 36 |
| 7 x 7 = 49 |
| 8 x 8 = 64 |
| 9 x 9 = 81 |



| № | уравнения | тип уравнения | ответ |
|---|---------------------|---------------|-------|
| 1 | $2x - 5 = 4$ | линейное | 4,5 |
| 2 | $x^2 = 1$ | квадратное | +,- 1 |
| 3 | $\sqrt{x} = 3$ | квадратное | 9 |
| 4 | $\frac{x^2}{3} = 4$ | линейное | 12 |
| 5 | $\sqrt[3]{x} = 2$ | линейное | 8 |
| 6 | $3x - 4 = x + 1$ | квадратное | - 2,5 |
| 7 | $4x^2 - 3x^2 = 100$ | квадратное | 10 |



$$\begin{array}{r} 2500 \\ \times 42 \\ \hline 2100 \\ + 8400 \\ \hline 105000 \end{array}$$

- 2 x 2 = 4
- 3 x 3 = 9
- 4 x 4 = 16
- 5 x 5 = 25
- 6 x 6 = 36
- 7 x 7 = 49
- 8 x 8 = 64
- 9 x 9 = 81



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

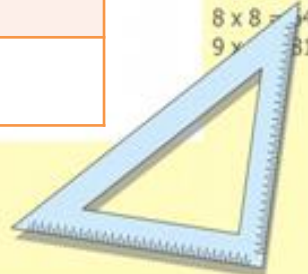
$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

$$\sin 90^\circ = 1$$



$$\begin{cases} x = 25y + 45 \\ y = 1 \\ x = 25 + 45 \\ \hline x = 70 \end{cases}$$

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$

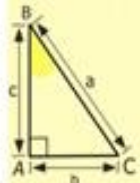
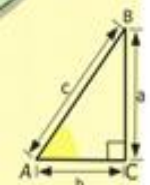
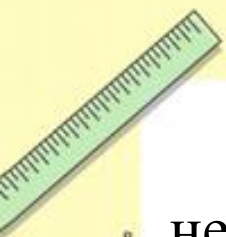


Иррациональные уравнения

Иррациональное уравнение - уравнение, содержащее неизвестное под знаком корня.

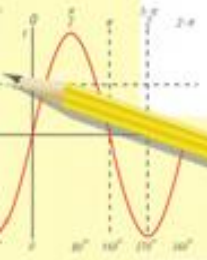
Область допустимых значений (ОДЗ) уравнения - все те значения переменной, при которых имеют смысл левая и правая части уравнения. Например, иррациональное уравнение $\sqrt{x+2} = x$ имеет своей областью допустимых значений все те x , которые удовлетворяют условию $x+2 \geq 0$.

При решении иррациональных уравнений методом возведения в степень возможно появление посторонних корней. Важно помнить, что для исключения посторонних корней одного учета ОДЗ недостаточно. Необходимы проверка или указание дополнительного условия.



$$\begin{array}{r} 2500 \\ \times 42 \\ + 210 \\ \hline 105000 \end{array}$$

- $2 \times 2 = 4$
- $3 \times 3 = 9$
- $4 \times 4 = 16$
- $5 \times 5 = 25$
- $6 \times 6 = 36$
- $7 \times 7 = 49$
- $8 \times 8 = 64$
- $9 \times 9 = 81$



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

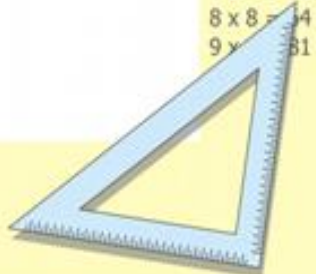
$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

$$\sin 90^\circ = 1$$



$$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 25 + 45 \\ \hline x = 70 \end{cases}$$

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$



Иррациональные уравнения

Пример 1. Решить уравнение $\sqrt{x+2} = x$

Способ 1. Возводим обе части уравнения в квадрат:

$$x + 2 = x^2$$

Решаем уравнение $x^2 - x - 2 = 0$

$$x_1 = 2; x_2 = -1$$

Проверка. При $x = 2$ получаем $\sqrt{2+2} = 2$ - верно, следовательно $x = 2$ корень уравнения.

При $x = -1$ получаем $\sqrt{-1+2} = -1$ - неверно, следовательно $x = -1$ посторонний корень (заметим, что $x = -1$ удовлетворяет ОДЗ, но корнем не является).

Ответ: 2

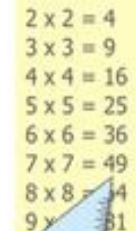
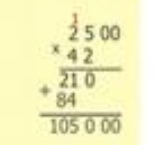
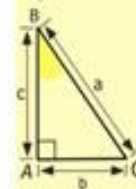
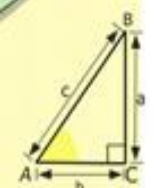
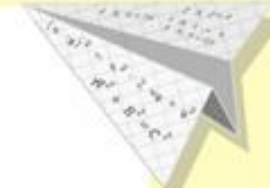
Способ 2. Возводим обе части уравнения в квадрат: $x + 2 = x^2$

и решаем его с учетом дополнительного условия $x \geq 0$.

$$x^2 - x - 2 = 0$$

Отсюда $x_1 = 2; x_2 = -1$ - не удовлетворяет условию.

Ответ: 2



$$\frac{a}{A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

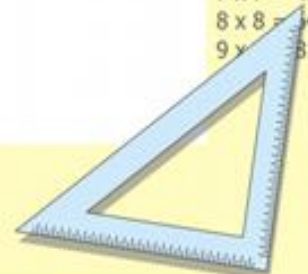
$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

$$\sin 90^\circ = 1$$



$$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \end{cases}$$
$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 25 + 45 \end{cases}$$
$$x = 70$$

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$



Иррациональные уравнения

Иногда нахождение ОДЗ в иррациональных уравнениях оказывается полезным и дает более рациональный способ решения.

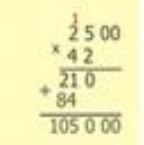
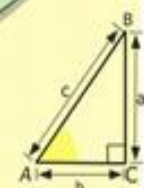
Пример 2. Решить уравнение $\sqrt{x-2} + 2\sqrt{2-x} + x^2 = 4$

$$\text{ОДЗ} = \begin{cases} x - 2 \geq 0, \\ 2 - x \geq 0. \end{cases}$$

ОДЗ состоит из единственного числа

Следовательно, 2 – единственное число, которое может оказаться корнем данного уравнения. Выполнив проверку, устанавливаем что 2 – корень уравнения.

Ответ: 2.



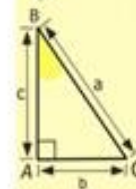
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$
$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

$$\sin 90^\circ = 1$$

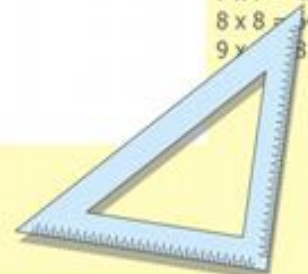


$$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \end{cases}$$
$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 25 + 45 \\ \hline x = 70 \end{cases}$$

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$



| |
|------------|
| 2 x 2 = 4 |
| 3 x 3 = 9 |
| 4 x 4 = 16 |
| 5 x 5 = 25 |
| 6 x 6 = 36 |
| 7 x 7 = 49 |
| 8 x 8 = 64 |
| 9 x 9 = 81 |



Иррациональные уравнения

Пример 3. Решить уравнение $\sqrt{x-4} + 3x = \sqrt{12-3x}$.

$$\text{ОДЗ} = \begin{cases} x - 4 \geq 0, \\ 12 - 3x \geq 0; \end{cases} x = 4.$$

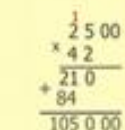
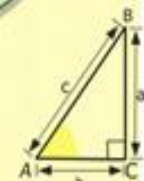
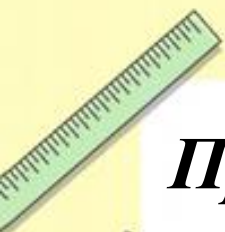
Проверка: $\sqrt{4-4} + 12 = \sqrt{12-12}$ — неверно.

Ответ: корней нет

Пример 4. Решить уравнение $\sqrt{x-3} + \sqrt{1-2x} = 8$.

$$\text{ОДЗ} = \begin{cases} x - 3 \geq 0, \\ 1 - 2x \geq 0; \end{cases} \text{решений нет.}$$

Ответ: корней нет



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

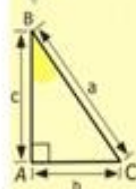
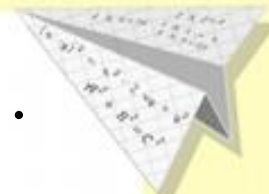
$$\sin 90^\circ = 1$$



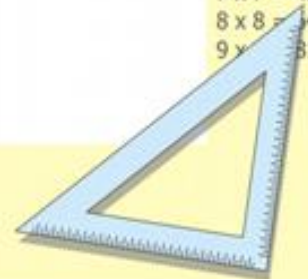
$$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 25 + 45 \\ x = 70 \end{cases}$$

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$



| |
|------------|
| 2 x 2 = 4 |
| 3 x 3 = 9 |
| 4 x 4 = 16 |
| 5 x 5 = 25 |
| 6 x 6 = 36 |
| 7 x 7 = 49 |
| 8 x 8 = 64 |
| 9 x 9 = 81 |



Иррациональные уравнения

Рассмотрим уравнения, содержащие сумму или разность квадратных корней.

Пример 5. Решить уравнение $\sqrt{2x+6} = 4 - \sqrt{x-2}$.

$\sqrt{2x+6} + \sqrt{x-2} = 4$, ОДЗ $x \geq 2$ возведем обе части уравнения в квадрат. Это преобразование будет равносильным, так как обе части уравнения положительны.

$$2x + 6 + 2\sqrt{2x^2 - 4x + 6x - 12} + x - 2 = 16.$$

$$2\sqrt{2x^2 + 2x - 12} = 12 - 3x.$$

При дальнейшем возведении в квадрат необходимо учесть дополнительное условие $12 - 3x \geq 0$ то есть $x \leq 4$.

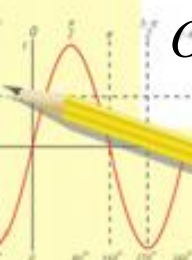
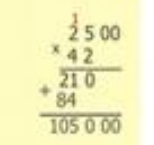
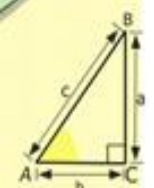
$$4(2x^2 + 2x - 12) = 144 - 72x + 9x^2;$$

$$x^2 - 80x + 192 = 0.$$

Отсюда $x_{1,2} = 40 \pm 8\sqrt{22}$

Оценка корней показывает, что промежутку $[2;4]$ принадлежит только корень $40 - 8\sqrt{22}$.

Ответ: $40 - 8\sqrt{22}$.



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

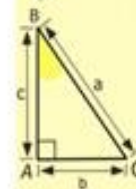
$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

$$\sin 90^\circ = 1$$

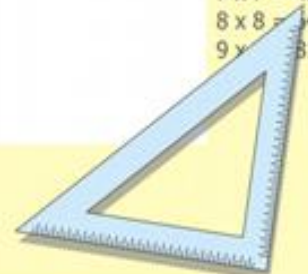


$$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \\ y = 1 \\ x = 25 + 45 \\ x = 70 \end{cases}$$

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$



| |
|------------|
| 2 x 2 = 4 |
| 3 x 3 = 9 |
| 4 x 4 = 16 |
| 5 x 5 = 25 |
| 6 x 6 = 36 |
| 7 x 7 = 49 |
| 8 x 8 = 64 |
| 9 x 9 = 81 |



Иррациональные уравнения

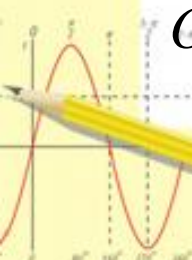
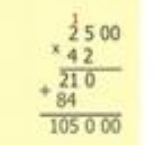
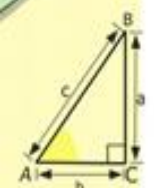
Заметим, что в последнем уравнении непосредственную проверку корней подстановкой было бы сделать затруднительно.

Если возводить в квадрат обе части исходного уравнения сразу, без предварительного перехода к сумме корней, то дополнительное условие будет сложнее.

Пример 6. Решить уравнение $\sqrt{x+3} + \sqrt{x+8} = 5$.

Рассмотрим функции $f(x) = \sqrt{x+3}$, $g(x) = \sqrt{x+8}$. Они возрастающие, их сумма $y = f(x) + g(x)$ также возрастает. Так как всякая монотонная функция принимает каждое свое значение лишь при одном значении аргумента, то данное уравнение если и имеет корень, то только один. Подбором устанавливаем, что корень данного уравнения $x = 1$.

Ответ: 1



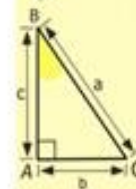
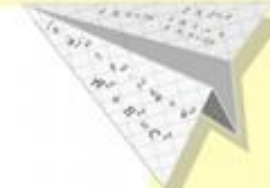
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$
$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

$$\sin 90^\circ = 1$$

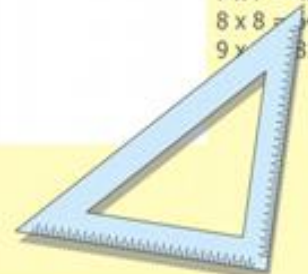


$$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \end{cases}$$
$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 25 + 45 \\ x = 70 \end{cases}$$

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$



| |
|------------|
| 2 x 2 = 4 |
| 3 x 3 = 9 |
| 4 x 4 = 16 |
| 5 x 5 = 25 |
| 6 x 6 = 36 |
| 7 x 7 = 49 |
| 8 x 8 = 64 |
| 9 x 9 = 81 |

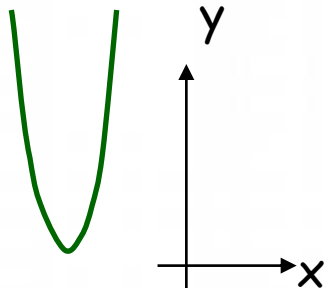


Какая из заданных функций возрастает?

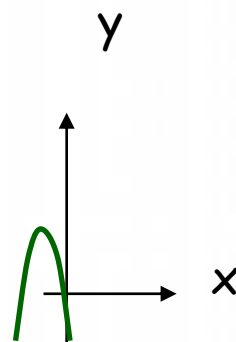
Какая из заданных функций убывает?

№1-6 функции

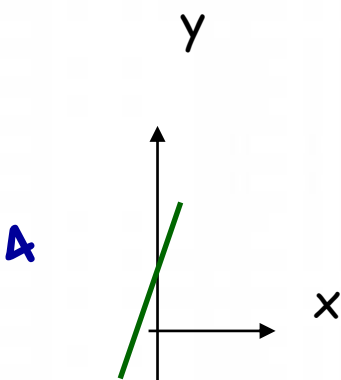
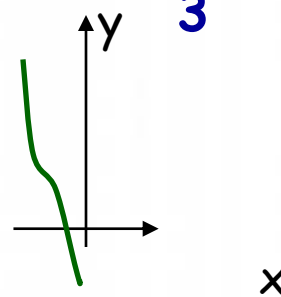
1



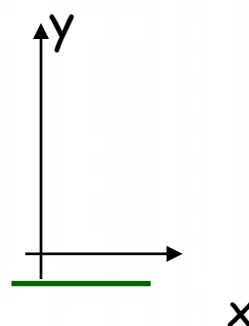
2



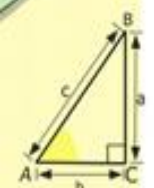
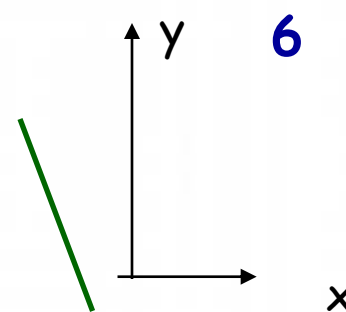
3



5



6



$\frac{1}{2} 500$
 $\times 42$
 $\hline 210$
 $+ 84$
 $\hline 105000$



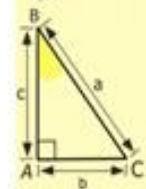
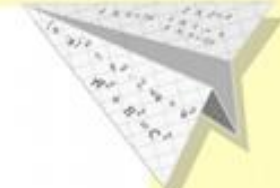
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$
$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

$$\sin 90^\circ = 1$$

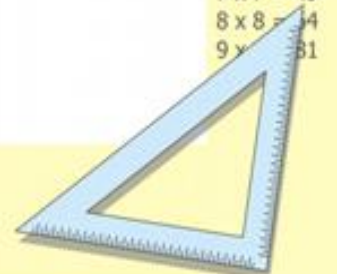


$$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \end{cases}$$
$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 25 + 45 \\ \hline x = 70 \end{cases}$$

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$



- $2 \times 2 = 4$
- $3 \times 3 = 9$
- $4 \times 4 = 16$
- $5 \times 5 = 25$
- $6 \times 6 = 36$
- $7 \times 7 = 49$
- $8 \times 8 = 64$
- $9 \times 9 = 81$



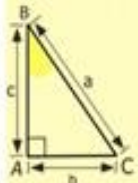
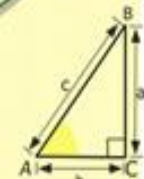
Иррациональные уравнения

Реши сам:

1. $2\sqrt{x+5} = x+2$

2. $\sqrt{x+10} + \sqrt{x-2} = 6$

3. $x + 12\sqrt{x} - 64 = 0$



$$\begin{array}{r} \frac{1}{2} 500 \\ \times 42 \\ \hline 210 \\ + 84 \\ \hline 10500 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2 \times 2 = 4 \\ 3 \times 3 = 9 \\ 4 \times 4 = 16 \\ 5 \times 5 = 25 \\ 6 \times 6 = 36 \\ 7 \times 7 = 49 \\ 8 \times 8 = 64 \\ 9 \times 9 = 81 \end{array}$$



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

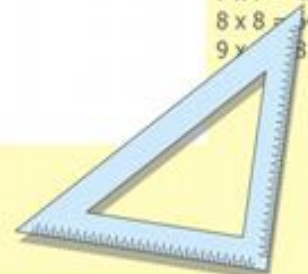
$$\sin 90^\circ = 1$$



$$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 25 + 45 \\ \hline x = 70 \end{cases}$$

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$



Домашнее задание

Решить уравнение:

$$\sqrt{x+2} = x$$

Ответ: $x=2$

$$(x-5)(x+2)(\sqrt{x-7}) = 0$$

Ответ: $x=7$

$$\sqrt{x-3} = 4$$

Ответ: $x=19$

$$\sqrt{x^2 + 5x + 1} + 1 = 2x$$

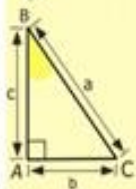
Ответ: $x = 3$

Найти графически число решений системы уравнений:

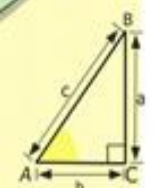
$$\begin{cases} x^2 - 1 = y \\ 3x - y = 2 \end{cases}$$

Вычислить:

$$25^{0.5} - \sqrt{64} - \left(\frac{1}{3}\right) 2^3$$



- $2 \times 2 = 4$
- $3 \times 3 = 9$
- $4 \times 4 = 16$
- $5 \times 5 = 25$
- $6 \times 6 = 36$
- $7 \times 7 = 49$
- $8 \times 8 = 64$
- $9 \times 9 = 81$



$$\begin{array}{r} \frac{1}{2} 500 \\ \times 42 \\ \hline 210 \\ + 84 \\ \hline 10500 \end{array}$$



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

$$\sin 90^\circ = 1$$



$$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 25 + 45 \end{cases}$$

$$\frac{x}{70}$$

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$

